

УДК 514.17+519.17+ 515.124.4 О хроматическом числе плоскости.

А. Я. Канель-Белов, В. А. Воронов, Д. Д. Черкашин

22 декабря 2015 г.

Аннотация

Данная статья посвящена естественному обобщению задачи о хроматическом числе плоскости. Рассматриваются хроматические числа пространств вида $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]^k$ при сколь угодно малом ε с запрещенным евклидовым расстоянием 1.

Показано, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$ и $6 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \leq 7$.

Также в статье рассматриваются естественным образом возникающие дальнейшие вопросы.

Ключевые слова: Хроматическое число плоскости, хроматические числа пространств.

Аннотация

We consider natural generalization of plane chromatic number problem. We consider chromatic numbers χ of spaces $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]^k$ for arbitrary small ε .

We prove that $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$ and $6 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \leq 7$.

Also we consider natural questions, arising from this considerations.

Key words: Chromatic number of plane, Chromatic number of Euclidean spaces.

1 Введение.

Рассмотрим граф, вершинами которого являются точки плоскости, а ребра соединяют пары точек на расстоянии 1. Э. Нельсон и Дж. Р. Извел, а также независимо от них П. Эрдеш и Г. Хадвигер поставили задачу о нахождении хроматического числа этого графа (обозначим его за $\chi(\mathbb{R}^2)$). (*Проблема Нельсона-Хадвигера*) Хорошо известна следующая теорема:

Теорема 1. $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$.

Получить эти оценки сравнительно несложно. К сожалению, более чем за 50 лет не появилось никаких аргументов, позволяющих их улучшить. С другой стороны, попытки как-то подойти к этой проблеме породили огромное количество интересных задач и содержательных результатов, им посвящена обширная литература (чуть более подробная библиография – см. раздел 2).

Естественным ослаблением служит требование нахождения точек на расстоянии сколь угодно близко к единице. В этом случае найдутся две точки на почти-единичном расстоянии для раскраски плоскости в 5 цветов, см. например [3]. Более сильный результат состоит в том, что если одноцветные множества измеримы, то при пяти цветной раскраске также найдутся точки на единичном расстоянии.

Мы рассматриваем “почти плоский” случай или случай размерности “ $2 + \varepsilon$ ”. Наш результат состоит в том, что если слойка между двумя плоскостями в трехмерном пространстве произвольным образом раскрашена в 4 цвета, то найдутся две точки на единичном расстоянии (см. теорему 6).

Кроме того, мы показываем что при наличии двух инфинитезимальных измерений, это верно и для 5 цветов. Иными словами, если прямое произведение плоскости на сколь угодно малый квадрат раскрашено в 5 цветов, то найдутся две одноцветные точки на единичном расстоянии (см. теорему 8).

Случай прямого произведения существенно интереснее и сложнее случая расстояний из интервала $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Например, нам удастся найти точки на единичном расстоянии в слойке только для четырех цветов. В этой связи возникает естественный

Вопрос 1. Пусть прямое произведение плоскости на отрезок раскрашено в 5 цветов. Верно ли, что найдутся две одноцветных точки на единичном расстоянии?

Другим направлением исследований явилось следующее.

Вопрос 2. Рассмотрим раскраску плоскости в n цветов. Верно ли, что в одном из цветов укладываются все расстояния?

Иными словами, может ли так быть, чтобы в первом цвете не наблюдалось расстояния d_1 , во втором — d_2 , в третьем — d_3 ? Когда $d_i = 1$ мы получаем задачу о хроматическом числе плоскости. Интересно, что для трех цветов данная задача оказалась весьма нетривиальной, а для 6 были построены различные контрпримеры.

И в этой связи возникают аналогичные вопросы для слоев и почти-расстояний.

2 О хроматических числах пространств.

Мы приведем лишь краткий перечень основных достигнутых результатов. Хроматические числа пространств активно исследовались, например, в школе А. М. Райгородского. Более подробные сведения о проблеме Нельсона-Хадвигера и смежных задачах можно почерпнуть из следующих обзоров: П. К. Агарвал и Ж. Пах [4], П. Брасс, В. Мозер, Ж. Пах [5], М. Бенда, М. Перлес [6], К. Б. Чилакамарри [7], В. Кли и С. Вэгон [13], А. М. Райгородский [16], [17], [19], Л. А. Сзекели [20].

2.1 О хроматическом числе плоскости.

Начнем с ослаблений. Если каждое одноцветное множество разбивается на связные области, ограниченные жордановыми кривыми, то необходимо не менее 6 цветов, что было доказано Д. Р. Вудаллом еще в 1973-ем году [22]. К. Дж. Фалконер в 1981-ом году показал, что если дополнительно потребовать, чтобы множества точек, раскрашенных в один и тот же цвет, были измеримы по Лебегу, тогда для правильной раскраски плоскости требуется хотя бы 5 цветов [10]. Разумеется, раскраска плоскости в 7 цветов обеспечивает оценку сверху и для ослабленных формулировок (см. Рис. 1).

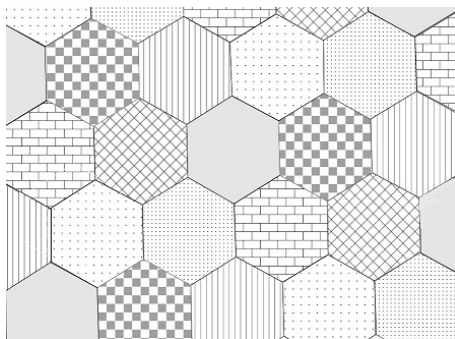


Рис. 1: Раскраска плоскости в 7 цветов. Стороны правильных 6-угольников имеют длину $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Одна из главных трудностей заключается в том, что ответ *может зависеть* от теоретико-множественной аксиоматики, как показали в 2003-ем году С. Шелах и А. Сойфер [21]. Если мы предполагаем аксиому выбора, то по теореме Эрдеша-де Брейна [9] хроматическое число бесконечного графа реализуется на конечном подграфе. Однако компьютерный перебор не находит подграфов с хроматическим числом хотя бы 5, что позволяет предположить, что хроматическое число в стандартной аксиоматике равняется четырем. Если же отказаться от аксиомы выбора, но дополнить стандартную аксиоматику Цермело-Френкеля аксиомой зависимого выбора и дополнительно потребовать измеримость всех подмножеств по Лебегу, то применимо доказательство Фалконера, и хроматическое число лежит между пятью и семью.

2.2 Задача для произвольных метрических пространств.

Перейдем к различным обобщениям. Для произвольного метрического пространства (X, d) и числа $a > 0$ определим граф $G_a(X, d)$ следующим образом: множество его вершин совпадает с точками пространства, множество ребер образуют пары точек, лежащие на расстоянии a . Нас по-прежнему интересует хроматическое число этого графа $\chi(X, d, a)$. Наиболее часто в качестве (X, d) рассматривают \mathbb{R}^n и \mathbb{Q}^n с евклидовой метрикой. Мы ограничимся этими случаями при $a = 1$. Стоит отметить, что в вещественном случае все графы G_a , очевидно, изоморфны.

2.2.1 Хроматические числа вещественных пространств.

Для прямой ответ очевиден: $\chi(\mathbb{R}) = 2$. При $n = 2$ мы получаем в точности исходную формулировку вопроса о хроматическом числе плоскости.

При $n = 3$ задача представляется еще более сложной, чем классическая проблема Нельсона-Хадвигера, — последние оценки с обеих сторон получены в текущем столетии.

Теорема 2.

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$$

.

Нижняя оценка принадлежит О. Нечуштану [15], верхняя — Д. Кулсону [8].

В асимптотике же выполняются следующие оценки:

Теорема 3.

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Нижняя оценка принадлежит А. М. Райгородскому [18], верхняя — Д. Г. Ларману и К. А. Роджерсу [14]. Стоит отметить, что асимптотические нижние оценки в этой и смежных задачах были получены интересным самым по себе *линейно-алгебраическим методом*, более того, с их помощью Дж. Кан и Дж. Калаи в 1993-ем году построили контрпример к гипотезе Борсука [12], стоявшей к тому моменту более пятидесяти лет. Более подробно про гипотезу Борсука и линейно-алгебраический метод можно почитать в [19].

2.2.2 Хроматические числа рациональных пространств.

Одномерный случай, как и для вещественных чисел, тривиален: $\chi(\mathbb{Q}) = 2$.

Некоторое удивление может вызвать тот факт, что точное значение хроматического числа \mathbb{Q}^n известно не только в размерности 2, но и в размерностях 3 и 4 (см. Д. Р. Вудалл [22], П. Д. Джонсон [11] и М. Бенда-М. Перлес [6]).

Теорема 4. $\chi(\mathbb{Q}^2) = \chi(\mathbb{Q}^3) = 2$, $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$.

Лучшие асимптотические оценки, как и в вещественном случае принадлежат, нижняя — А. М. Райгородскому [18], верхняя — Д. Г. Ларману и К. А. Роджерсу [14].

Теорема 5.

$$(1.173 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{Q}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

3 Основные результаты.

Нас интересуют хроматические числа пространств вида $\mathbb{K}^n \times [0, \varepsilon]^k$, где $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $n, k \geq 1$ с евклидовой метрикой. Такие метрические пространства будем называть “слоями”, а в случае $n = k = 1$ “полосами”.

3.1 Хроматические числа одномерных слоев.

Начнем с наблюдений:

Утверждение 1. Пусть $0 < h \leq \sqrt{\frac{3}{4k}}$. Тогда

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, h]^k) = 3.$$

Пусть $\sqrt{\frac{3}{4k}} < h \leq \sqrt{\frac{8}{9k}}$. Тогда

$$\chi(\mathbb{R} \times [0, h]^k) = 4.$$

Верхняя оценка. Пусть $0 < h \leq \sqrt{\frac{3}{4k}}$. Раскрасим \mathbb{R} в 3 цвета, чередуя одноцветные полуинтервалы длины $1/2$ (цветов 1, 2, 3, 1, 2, 3 и т.д.). Затем каждой точке $\mathbb{R} \times [0, h]^k$ присвоим тот же цвет, который имеет проекция из прямого произведения на действительную прямую. Тогда диаметр одноцветного параллелепипеда $[0; \frac{1}{2}] \times [0, h]^k$ не превосходит 1, причем в случае равенства концы диаметра раскрашены по-разному.

Аналогично строится раскраска в 4 цвета при $\sqrt{\frac{3}{4k}} < h \leq \sqrt{\frac{8}{9k}}$ — в этом случае полуинтервалы имеют длину $1/3$.

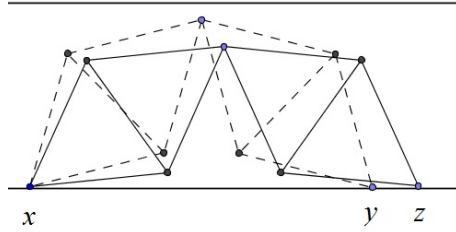


Рис. 2: Цепочка θ -графов внутри полосы.

Нижняя оценка. При $h > 0$ полоса $\mathbb{R} \times [0, h]$ содержит нечетный цикл с ребрами длины 1, поэтому $\chi(\mathbb{R} \times [0, h]^k) \geq 3$.

Множество $\mathbb{R} \times [0, h]^k$ при $\sqrt{\frac{3}{4k}} < h \leq \sqrt{\frac{8}{9k}}$ содержит полосу $\mathbb{R} \times [0, h_1]$, $h_1 > \sqrt{3}/2$, которая является произведением \mathbb{R} на большую диагональ k -мерного гиперкуба с ребром h . В такую полосу вкладывается дистанционный граф, изображенный на рис. 2, причем $d(y, z)$ может принимать любое значение из отрезка $[0, 3 - 2\sqrt{3 - h_1^2}]$. Выберем такую реализацию этого графа, чтобы точки x, y, z лежали на границе полосы, и $d(y, z) = 1/m$; $m \in \mathbb{N}$. Копируя конструкцию m раз, строим дистанционный граф с хроматическим числом 4. \square

Замечание. Число вершин критического графа стремится к бесконечности, когда h приближается к значению, в котором хроматическое число разрывно ($h = 0$ и $h = \sqrt{\frac{3}{4k}}$), но граф может быть размещен в области, диаметр которой не зависит от h .

Очевидно, функция $\xi_{n,k}(h) = \chi(\mathbb{R}^n \times [0, h]^k)$, определенная при $h \geq 0$, не убывает. При любых фиксированных n, k число значений $\xi_{n,k}(h)$ конечно, поскольку $\chi(\mathbb{R}^n) \leq \xi_{n,k}(h) \leq \chi(\mathbb{R}^{n+k})$, а следовательно, конечно и число точек разрыва. По-видимому, при $n > 1$ ни одна точка разрыва $\xi_{n,k}(h)$ не может быть найдена без улучшения известных оценок $\chi(\mathbb{R}^n)$.

Укажем более широкий класс множеств, для которых нижняя оценка из Утверждения 1 остается в силе.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ имеет ровно две компоненты связности P_1 и P_2 . Связность подмножеств \mathbb{R}^2 здесь интерпретируется в смысле стандартной топологии.

Шириной множества Q , удовлетворяющего приведенному выше условию, будем называть число

$$w(Q) = \inf\{d(x, y) \mid x \in P_1, y \in P_2\},$$

где $d(x, y)$ — евклидово расстояние.

Утверждение 2. Пусть ε — произвольное положительное число; Q — неограниченная плоская фигура ширины не менее ε . Тогда $\chi(Q) \geq 3$.

3.2 Хроматические числа двумерных слоев.

Перейдем к промежуточному случаю между плоскостью и пространством — $\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]$ (слойка высоты ε). Несмотря на то, что это множество по-прежнему допускает правильную раскраску в 7 цветов, нижняя оценка менее тривиальна, чем для плоскости:

Теорема 6. Пусть ε — положительное число, не превосходящее $\sqrt{3/7}$. Тогда

$$5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7.$$

В отличие от случая $n = 1$ здесь не удастся доказать даже то, что функция $\xi_{2,1}(\varepsilon)$ разрывна в точке $\varepsilon = 0$. Рассмотрим теперь “раздутие” плоскости в пространстве большей размерности. Благодаря тому, что раскраска плоскости в 7 цветов не содержит расстояний, принадлежащих некоторому интервалу, верхняя оценка сохраняется при увеличении k .

Теорема 7. Пусть k — целое число, $\varepsilon < \varepsilon_0(k)$ — положительное число, Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^k) \leq 7.$$

Нижнюю оценку удастся улучшить уже при $k = 2$.

Теорема 8. Пусть ε — произвольное положительное число, Тогда

$$\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \geq 6.$$

Отметим, что для получения приведенных нижних оценок, как и при $n = 1$, достаточно рассмотреть раскраску ограниченной области, диаметр которой не зависит от ε .

В доказательстве Теоремы 5 используется следующая небезынтересная сама по себе

Лемма 1. Предположим, что евклидова плоскость правильно покрашена в k цветов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется круг радиуса ε , содержащий точки как минимум трех различных цветов.

Следствие 1. Предположим, что евклидова плоскость правильно покрашена в k цветов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется окружность радиуса меньше чем ε , содержащая точки как минимум трех различных цветов.

Верно и более сильное утверждение, нежели Лемма 1:

Теорема 9. Пусть пространство \mathbb{R}^n правильно покрашено в k цветов. Иными словами, обозначив множества цветов за C_i , имеем:

$$\bigcup_{i=1}^m C_i = \mathbb{R}^n,$$

и ни одно из множеств C_i не содержит двух точек, находящихся на расстоянии 1. Тогда найдется $n + 1$ множество из этого семейства, пересечение замыканий которых непусто.

Утверждение теоремы очевидно в том случае, если компоненты связности замыканий C_i представляют собой многогранники, но оно справедливо и для произвольного покрытия с одним запрещенным расстоянием.

3.3 Хроматические числа рациональных пространств.

В рациональном случае справедливы следующие теоремы:

Теорема 10. *Для достаточно малого положительного ε выполняется*

$$\chi(\mathbb{Q} \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^3) = 3.$$

Очевидно, нельзя заменить в условии теоремы $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^3$ на $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2$ так как $\chi(\mathbb{Q}^3) = 2$.

Теорема 11. *Для достаточно малого положительного ε выполняется*

$$\chi(\mathbb{Q}^2 \times [0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2) = 4.$$

По тем же причинам, что и выше, нельзя заменить $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}^2$ на $[0, \varepsilon]_{\mathbb{Q}}$.

4 Доказательства

4.1 Доказательство нижней оценки в Теореме 6

Предположим противное; тогда наша слойка правильным образом покрашена в 4 цвета.

Определение 1. *Назовем число $r > 0$ запрещенным радиусом, если $G_1(S_r)$ содержит нечетный цикл.*

Следующее утверждение хорошо известно в фольклоре:

Утверждение 3. *Запрещенные радиусы плотны в $(1/2, \infty)$.*

Теперь рассмотрим точку Q с координатами $(0, 0, \frac{\varepsilon}{10})$ и множество w_Q , состоящее из таких точек (x, y, z) , что:

- $x^2 + y^2 < \frac{\varepsilon^2}{1000}$
- $\frac{\varepsilon}{2} < z < \varepsilon$
- $\text{dist}(Q, W) = 2\sqrt{1 - r^2}$, где r — запрещенный радиус.

Нетрудно видеть, что тогда окружность S , состоящая из точек, удаленных и от Q и $W \in w_Q$ на расстояние 1, имеет радиус ровно r . Получается, что S покрашена хотя бы в 3 цвета (так как по определению содержит нечетный цикл), причем эти цвета не совпадают с цветами, в которые покрашены Q и W . Значит Q и W покрашены в одинаковый цвет, следовательно, множество w_Q одноцветно.

Рассмотрим пересечение w_Q и плоскости $z = z_0$. Очевидно, оно состоит из нескольких окружностей. Выберем z_0 так, чтобы одна из окружностей содержала правильный треугольник $\Delta Q_1 Q_2 Q_3$ (выберем его параллельным некоторой заданной треугольной решетке на плоскости) со стороной $1/n$, где n большое целое число.

Теперь повторим операцию для точек Q_1, Q_2, Q_3 и плоскости $z = \frac{\varepsilon}{10}$, затем для новых точек в плоскости $z = z_0$ и так далее. Получим две одноцветных треугольных решетки с длиной ребра $1/n$. Противоречие. \square

4.2 Доказательство верхней оценки в Теоремах 6 и 7.

Рассмотрим стандартный пример для плоскости (см. Рис. 1). В нем нет двух точек, покрашенных в один и тот же цвет, и лежащих на расстоянии между $2/\sqrt{7}$ и 1. Значит, можно умножить этот пример на отрезок $[0, \varepsilon]$, и раскраска останется правильной, ведь $(2/\sqrt{7})^2 + \varepsilon^2 < 1$. \square

4.3 Доказательство Леммы 1.

Покажем, что найдется круг сколь угодно малого радиуса, содержащий точки по крайней мере трех цветов. Предположим противное. Тогда найдутся правильная раскраска плоскости и $\varepsilon > 0$, такие что все круги радиуса ε содержат точки не более двух различных цветов. Разобьем плоскость на квадратики со стороной $\varepsilon/10$. Заметим, что каждый квадратик содержит не более двух различных цветов. Рассмотрим два соседних по стороне квадратики, содержащие точки разного цвета (если таких нет, то вся плоскость покрашена в один цвет). Посмотрим на максимальный связный набор квадратиков, покрашенный в эти два цвета – для удобства в первый и второй. Заметим, что он ограничен, так как имеет ширину хотя бы $\varepsilon/10$, иначе по Утверждению 2 он покрашен хотя бы в 3 цвета. Также заметим, что его граничные квадратики должны быть одноцветными, поскольку шарик с центром в двухцветном квадратике содержит всех его соседей по стороне и также вынужден быть только цветов 1 и 2. Значит вся его внешняя граница одноцветна, таким образом диаметр фигуры не превосходит 1, то есть она лежит в квадрате со стороной 1.

Рассмотрим некоторую связную область R , состоящую из квадратов цвета 1. Ее внешняя граница — замкнутая ломаная. Эта ломаная разделяет квадраты цвета 1 и квадраты, в которых встречаются два цвета 1 и s . Добавим двухцветные квадраты $(1, s)$. Тогда новая область граничит только с одноцветными квадратами (s) . Добавим и эти квадраты, и граница снова будет одноцветна. Заметим, что площадь фигуры увеличилась не менее чем на

$$\left(\frac{\varepsilon}{10}\right)^2.$$

В силу того, что диаметр ограничен, можно выполнить лишь конечное число таких шагов. Поэтому на некотором шаге после добавления двухцветных квадратов рассматриваемая область должна совпасть со всей плоскостью. Следовательно существует раскраска произвольно большого куска плоскости в два цвета. Противоречие. \square

4.4 Доказательство Следствия 1

Итак, существует круг радиуса $\varepsilon/10$, в котором есть точки трех различных цветов. Покажем, что какие-то точки трех различных цветов лежат на окружности радиуса не более ε . Рассмотрим в круге радиуса $\varepsilon/10$ разноцветный треугольник $\triangle ABC$. У него есть тупой угол (иначе нам подходит описанная окружность треугольника $\triangle ABC$); не умаляя общности, это угол A . Рассмотрим точку D , такую что $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$. Тогда $\angle BDC = 120^\circ$. Заметим, что любой из треугольников ABD, ACD, BCD имеет все углы меньше 150° , а также при любой раскраске цвета D один из треугольников ABD, ACD, BCD разноцветный. Радиус описанной окружности любого из треугольников не превосходит $\frac{\varepsilon}{10 \cdot 2 \sin \angle D} < \varepsilon$, и мы получили требуемое. \square

4.5 Доказательство Теоремы 8.

Предположим существование правильной раскраски слойки в 5 цветов. Обозначим полноценные координаты x, y ; инфинитезимальные z, t .

Выберем $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$, обозначим $\varepsilon_0 = \varepsilon/2$ и для каждого x, y рассмотрим девятиэлементное множество точек

$$Q_{x,y} = \{(x, y, z, t) | z, t \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_0 \pm \varepsilon_1\}\}.$$

Все эти точки лежат в нашей слойке, а значит покрашены в какой-то цвет. Пусть для каких-то $x = x_0$ и $y = y_0$ соответствующее им множество содержит точки хотя бы трех различных цветов. Тогда выберем три точки разного цвета, не лежащие на одной прямой, обозначим их A, B, C и перейдем к следующему абзацу. Иначе каждое множество содержит точки только двух цветов. Покрасим точку (x, y) плоскости $P = \mathbb{R}^2$ в тот цвет, который чаще встречается в $Q_{x,y}$. Цвет каждой точки $(x, y) \in P$ определен однозначно; более того, мы получили правильную раскраску плоскости P , так как для двух точек (x', y') и (x'', y'') хотя бы одна пара точек $((x', y', z, t), (x'', y'', z, t))$ одновременно покрашено в

доминирующие цвета при $z, t \in \{\varepsilon_0, \varepsilon_0 \pm \varepsilon_1\}$. Согласно Лемме 1, на плоскости P найдется трехцветная окружность ω произвольно малого радиуса $\delta \ll \varepsilon_1$. Пусть выполнено условие

$$\frac{(\varepsilon_0 - 3\varepsilon_1)(\varepsilon_1 - \delta)}{3\delta} > 1. \quad (1)$$

Выберем на окружности ω три попарно разноцветные точки A_0, B_0, C_0 . Заметим, что $Q_{x,y}$ содержит точки доминирующего цвета или в каждой строке или в каждом столбце, так как иначе для точек доминирующего цвета остается только две строки и два столбца, но $2 \times 2 = 4 < 9/2$. Значит можно выбрать в Q_{A_0}, Q_{B_0} и Q_{C_0} точки доминирующих цветов, на расстоянии хотя бы ε_1 по координатам z, t ; обозначим эти точки за A, B и C .

Итак, у нас есть принадлежащие слойке точки A, B, C на расстоянии хотя бы ε_1 друг от друга в проекции на плоскость $(0, 0, z, t)$, в то время как попарные расстояния в проекции на $(x, y, 0, 0)$ не превосходят $2\delta \ll \varepsilon_1$. Построим треугольник $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCO$ так, чтобы точка O принадлежала слойке. Пусть u — нормаль к плоскости ABC в точке O , и $D = O + \delta_1 u$, где $0 < \delta_1 \leq \delta$. Теперь рассмотрим окружность ω_{ABD} , состоящую из таких точек T , что $AT = BT = DT = 1$. Угол между двумерной плоскостью, в которой лежит окружность ω_{ABD} , и плоскостью $(x, y, 0, 0)$ не превосходит $\arctg(3\delta/\varepsilon_1 - \delta)$. Тогда из (1) следует, что ω_{ABD} лежит во внутренности слойки.

Аналогичные рассуждения справедливы для окружностей ω_{ACD} и ω_{BCD} . Заметим, что существует окрестность $U(D)$ точки D , такая, что для любой точки $D' \in U(D)$ окружности $\omega_{ABD}, \omega_{ACD}, \omega_{BCD}$ лежат внутри слойки. Если радиусы окружностей $\omega_{ABD'}, \omega_{ACD'}$ и $\omega_{BCD'}$ запрещенные (см. Определение 1), то точка D' не может быть покрашена ни в один цвет, и мы приходим к противоречию.

Покажем существование такой точки D' . Радиус описанной окружности треугольника ABD равен $r_{ABD} = \frac{AB}{2 \sin \angle D}$, то есть зависит только от угла $\angle D$. Радиус ω_{ABD} равен

$$\sqrt{1 - r_{ABD}^2},$$

то есть тоже зависит только от угла $\angle D$. Теперь заметим, что

$$\angle D = \arcsin \left(\frac{AB}{2\sqrt{1 - r_{\omega_{ABD}}^2}} \right).$$

Поскольку запрещенные радиусы плотны в некой окрестности единицы и $\delta \ll \varepsilon$, то и запрещенные углы тоже плотны в некотором отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$, причем этот отрезок стремится к $[0, \pi]$ при δ стремящемся к нулю.

Выберем систему координат с базисом (OA, OB, OD) и началом O в гиперплоскости, которой принадлежат точки A, B, C, D . Пусть функция $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ сопоставляет координатам (l_1, l_2, l_3) точки D' углы $\theta_1 = \angle AD'B, \theta_2 = \angle AD'C, \theta_3 = \angle BD'C$. Для F справедлива теорема об обратной функции, поскольку градиенты

$$\nabla \theta_1(l), \nabla \theta_2(l), \nabla \theta_3(l)$$

направлены по биссектрисам углов и, как следствие, линейно независимы. Пусть $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3$ — запрещенные углы из достаточно малой окрестности $\angle ADB, \angle ADC, \angle BDC$ соответственно. Тогда точка $D' = (l_1(\theta), l_2(\theta), l_3(\theta))$ — искомая. \square

4.6 Доказательство Теоремы 9.

Идея доказательства заключается в построении семейства замкнутых множеств, диаметр каждого из которых не превосходит двух, и которые также образуют покрытие \mathbb{R}^n . После того, как искомое семейство найдено, утверждение следует непосредственно из определения топологической размерности. Используется стандартная топология \mathbb{R}^n .

Напомним, что C_i — множество всех точек \mathbb{R}^n , раскрашенных в i -й цвет, $1 \leq i \leq m$, и положим

$$C_i^* := \overline{\text{Int } C_i} \quad (\text{замыкание внутренности замыкания}).$$

Разобьем каждое из множеств C_i^* на компоненты связности (в смысле стандартной топологии):

$$C_i^* = \bigcup_{\alpha \in A_i} D_\alpha.$$

(i). Множества C_i^* образуют покрытие \mathbb{R}^n .

Пусть верно обратное: $\exists v : \forall i \quad v \notin C_i^*$. Тогда существует открытый шар $U_\varepsilon(v)$:

$$U_\varepsilon(v) \cap C_i^* = \emptyset; \quad U_\varepsilon(v) \subset \bigcup C_i.$$

Рассмотрим некоторый шар

$$U^1 \subset U_\varepsilon(v) \setminus \overline{C}_1.$$

Очевидно, U^1 не может быть подмножеством \overline{C}_i — иначе пересечение внутренности \overline{C}_i и $U_\varepsilon(v)$ было бы непусто. Определим последовательность вложенных шаров

$$U^{k+1} \subset U^k \setminus \overline{C}_k.$$

Точки из U^{m+1} не принадлежат ни одному из \overline{C}_i , что противоречит исходным предположениям.

(ii). Если сфера S радиуса 1 с центром в точке v содержит внутренние точки множеств \overline{C}_i , $1 \leq i \leq n$, то v принадлежит хотя бы одному из множеств C_j^* , $n+1 \leq j \leq m$.

В самом деле, можно выбрать попарно различные точки $x_i \in S \cap \overline{C}_i$, $1 \leq i \leq n$, причем $x_i \in \text{Int } \overline{C}_i$. Пусть y_i пробегает множество $C_i \cap U_\varepsilon(x_i)$; $1 \leq i \leq n$, и точка $w = w(y_1, \dots, y_n)$ находится на расстоянии 1 от y_1, \dots, y_n . Тогда

$$w \in \bigcup_{j=n+1}^m C_j.$$

Всякая окрестность v содержит внутреннюю точку

$$\bigcup_{j=n+1}^m \overline{C}_j,$$

а значит, и внутреннюю точку хотя бы одного из множеств

$$\overline{C}_{n+1}, \dots, \overline{C}_m.$$

(iii). Если некоторая точка $v \in \mathbb{R}^n$ покрыта не более чем n множествами из $\{D_\alpha\}$, то диаметр хотя бы одного из этих множеств не превосходит 2.

В противном случае каждое множество из $\{D_\alpha\}$, покрывающее v , имеет непустое пересечение со сферой S радиуса 1 с центром в точке v . Без ограничения общности предположим, что точку v покрывают множества D_1, \dots, D_n , являющиеся компонентами связности C_1^*, \dots, C_n^* соответственно. Пусть $\min\{\text{Diam } D_i\} = 2 + \delta$

Пусть $w \in \mathbb{R}^n$, $\|w\| = 1$ — некоторое направление; S_η — сфера радиуса 1 с центром в точке $u(\eta) = v + \eta w$, $\eta \in \mathbb{R}_+$.

Тогда множество

$$T_i \triangleq \{\eta \in \mathbb{R}_+ : S_\eta \cap \text{Int } D_i \neq \emptyset; \quad 1 \leq i \leq n\}$$

всюду плотно на отрезке $[0, \delta/2]$. Следовательно,

$$\forall \eta \in [0, \delta] \quad u(\eta) \in \bigcup_{n+1}^m \overline{C}_j.$$

Аналогичное рассуждение справедливо для произвольного вектора w единичной длины. Но тогда любая окрестность v содержит шар, являющийся подмножеством $\bigcup_{n+1}^m \overline{C}_j$, а следовательно, и внутреннюю точку хотя бы одного из множеств \overline{C}_j , $j > n$. Полученное противоречие доказывает п. (iii).

(iv). Если любая точка \mathbb{R}^n покрыта не более чем n множествами из $\{D_\alpha\}$, то семейство множеств $\Delta \triangleq \{D_\alpha \mid \text{Diam}(D_\alpha) \leq 2\}$ покрывает \mathbb{R}^n .

Очевидным образом следует из (iii).

(v). Найдутся множества $D'_1, D'_2, \dots, D'_{n+1} \in \Delta$, имеющие непустое пересечение.

Рассмотрим шар $U_R \subset \mathbb{R}^n$ и его покрытие семейством множеств Δ . Согласно одному из определений топологической размерности (см. П. С. Александров и Б. А. Пасынков [1]) при достаточно большом R среди покрывающих U_R замкнутых множеств, диаметр каждого из которых не превосходит 2, найдутся $n+1$, пересечение которых непусто. Пересекающиеся множества из Δ соответствуют различным цветам, поскольку в противном случае они не могли бы являться различными компонентами связности C_i^* . \square

Замечание. Пользуясь леммой Шпернера, нетрудно получить оценку на радиус шара, который содержит хотя бы одну точку, принадлежащую $n+1$ из множеств \overline{C}_i .

4.7 Доказательство Теоремы 10.

Пусть координата x полноценная, а координаты y, z и t инфинитезимальные.

Верхняя оценка очевидна — точки с координатами (x, y, z, t) при $\frac{2k}{3} < x \leq \frac{2(k+1)}{3}$ красим в цвет $k \bmod 3$.

Для доказательства нижней оценки достаточно вписать нечетный цикл в наш дистанционный граф.

Рассмотрим четное $n > \varepsilon^{-1}$ и вектор $e = (1 - n^{-1}, bn^{-1}, cn^{-1}, dn^{-1})$, такой что $b^2 + c^2 + d^2 = 2n - 1$. Заметим, что e уместается в нашу полосу, а также имеет единичную длину. Также рассмотрим вектор $e' = (1 - n^{-1}, -bn^{-1}, -cn^{-1}, -dn^{-1})$ и последовательность точек A_i , такую что $A_0 = (0, 0, 0, 0)$, $A_{2k+1} = A_{2k} + e$, $A_{2k+2} = A_{2k+1} + e'$. Нетрудно видеть, что $A_n = (n - 1, 0, 0, 0)$, поскольку n четно. Таким образом, точки A_0, \dots, A_n и точки $(1, 0, 0, 0), \dots, (n - 2, 0, 0, 0)$ образуют искомый нечетный цикл. Остается заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся целые n, b, c, d , удовлетворяющие нашим условиям. \square

4.8 Доказательство Теоремы 11.

Верхняя оценка немедленно следует из Теоремы 4, а именно из равенства $\chi(\mathbb{Q}^4) = 4$.

Перейдем к **доказательству нижней оценки**. Пусть координаты x и y полноценные, а координаты z и t инфинитезимальные. Теперь рассмотрим точки C_1, C_2 с рациональными координатами $(a_1, b_1, \gamma_1, \delta_1)$ и $(a_2, b_2, \gamma_2, \delta_2)$, такие что:

- $0 < \gamma_i, \delta_i < \varepsilon$.
- $\sqrt{a_i^2 + b_i^2} \in \mathbb{Q}$.
- $a_i^2 + b_i^2 + \gamma_i^2 + \delta_i^2 = 3$, т.е. $|C_i O| = \sqrt{3}$, где O — начало координат.
- $|C_1 C_2| = 1$.

Для каждой точки C_i рассмотрим точки A_i, B_i с координатами соответственно

$$\left(a_i \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right), b_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right), \frac{\gamma_i}{2}, \frac{\delta_i}{2} \right)$$

и

$$\left(a_i \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right), b_i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}} \right), \frac{\gamma_i}{2}, \frac{\delta_i}{2} \right).$$

Они обладают следующими свойствами:

- имеют рациональные координаты и лежат в нашей полоске.
- $|A_i B_i| = |A_i C_i| = |B_i C_i| = |A_i O| = |B_i O| = 1$

Очевидно, граф на вершинах $O, C_1, A_1, B_1, C_2, A_2, B_2$ не красится в 3 цвета, и лежит в нашей слоеке. \square

Замечание. Этот граф называется *веретеном Мозера*. Это наименьший по числу вершин граф, на котором достигается оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 4$.

5 Заключение и вопросы для дальнейшего исследования.

Мы показали, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]) \leq 7$ и $6 \leq \chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^2) \leq 7$, а также $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^k) \leq 7$ при достаточно маленьком ε . Естественным образом возникает вопрос о существовании такого k , что $\chi(\mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon]^k) = 7$ при произвольно малом ε .

Как можно заметить, в тех случаях, когда мы можем посчитать хроматическое число вещественной слоеки, имеет место дискретная непрерывность. Выполняется ли это свойство в общем случае? Иными словами, является ли функция $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]^m)$ дискретно непрерывной по ε ?

В одномерном и двумерном случае добавление лишней инфинитезимальной размерности увеличивает хроматическое число пространства. Из общих соображений следует, что должна выполняться оценка $\chi(\mathbb{R}^3 \times [0, \varepsilon]) \geq 7$, где ε — произвольное положительное число, однако нам не удалось это доказать. Более того, хочется предположить, что $\chi(\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]) \geq \chi(\mathbb{R}^n)$, однако это уже куда более сложное утверждение.

А. Б. Купавский в работе [2] поставил вопрос о максимальном гарантированном количестве цветов на m -мерной сфере радиуса r при правильной раскраске n -мерного пространства в конечное количество цветов. В той же работе были получены оценки при r , отделенных от нуля. Лемма 1 дополняет эти результаты при инфинитезимальных r , но только в случае $n = 2, m = 1$. По-видимому, из Теоремы 9 можно вывести аналогичный результат для $n = m + 1$ при произвольном $n > 2$.

Также интерес представляет и обратная задача. По натуральному числу k требуется построить “разумное” пространство с хроматическим числом ровно k . Например, было бы очень интересным такое утверждение для пространства с большим аффинным подпространством, в частности для $[0, h_1] \times \dots \times [0, h_m] \times [0, \varepsilon]^l \times \mathbb{R}^s$ при $s > 0$.

Благодарности. Исследование было частично поддержано грантом РФФИ № 14-01-00548. Данила Черкашин выражает благодарность Санкт-Петербургскому Математическому Обществу, поддерживавшему его стипендией имени Рохлина. Авторы благодарят Мишу Баска за плодотворное обсуждение и ценные замечания.

Сведения об авторах.

Канель-Белов Алексей Яковлевич, профессор кафедры дискретной математики МФТИ
kanelster@gmail.com

Воронов Всеволод Александрович, к.т.н., научный сотрудник Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
v-vor@yandex.ru

Черкашин Данила Дмитриевич, аспирант МФТИ, инженер исследователь СПбГУ, магистрант в Университете Женевы
matelk@mail.ru

Список литературы

- [1] П.С. Александров, Б.А. Пасынков. *Введение в теорию размерности*. М.: Наука, 1973. Стр. 164.
- [2] А. Б. Купавский, *О раскрасках сфер, вложенных в \mathbb{R}^n* , Математический Сборник Том 202, № 6, 2011.
- [3] Алексей Канель-Белов, Илья Иванов-Погодаев, Алексей Малистов, Михаил Харитонов, *Раскраски и кластеры*, <http://olympiads.mccme.ru/lktg/2010/2/index.htm>, 22-я летняя конференция международного математического Турнира городов, 2010, Российская академия наук, Департамент образования города Москвы, Московский центр непрерывного математического образования, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева, Журнал “Квант”, Теберда, Карачаево-Черкессия, 02.08.2010–10.08.2010
- [4] P.K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial geometry*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1995.
- [5] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, 2005.
- [6] M. Benda, M. Perles, *Colorings of metric spaces*, Geombinatorics, 9:3 (2000), 113–126
- [7] K.B. Chilakamarri, *The unit-distance graph problem: A brief survey and some new results*, Bull. Inst. Comb. Appl., 8 (1993), 39 - 60.
- [8] D. Coulson, *A 15-coloring of 3-space omitting distance one*, Discrete Math., 256 (2002), 83 - 90.
- [9] P. Erdős, N.G. de Bruijn, *A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations*, Indag. Math. 13 (1951) 371–373.
- [10] K.J. Falconer, *The realization of distances in measurable subsets covering R^n* , Comm. Theory (A) 31 (1981) 187–189.
- [11] Peter D. Johnson, *Coloring abelian groups*, Discrete Math, 40:219–223, 1982.
- [12] J Kahn, G Kalai, *A counterexample to Borsuk’s conjecture*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1993.
- [13] V. Klee, S. Wagon, *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory*, Math. Association of America, 1991.
- [14] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1 - 24.
- [15] O. Nechushtan, *Note on the space chromatic number*, Discrete Math., 256 (2002), 499 - 507.
- [16] A.M. Raigorodskii, *Borsuk’s problem and the chromatic numbers of metric spaces*, Russian Math. Surveys, 56 (2001), N1, 103 - 139.
- [17] A.M. Raigorodskii, *The chromatic numbers*, Moscow Centre for Continuous Mathematical Education (MCCME), Moscow, Russia, 2003 (book in Russian).
- [18] A.M. Raigorodskii, *On the chromatic number of a space*, Russian Math. Surveys, 55 (2000), N2, 351 - 352.
- [19] A.M. Raigorodskii, *The linear algebra method in combinatorics*, Moscow Centre for Continuous Mathematical Education (MCCME), Moscow, Russia, 2007 (book in Russian).
- [20] L.A. Székely, *Erdős on unit distances and the Szemerédi – Trotter theorems*, Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11 (2002), 649 - 666.

- [21] S. Shelah, A. Soifer, *Axiom of choice and chromatic number of the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 103 (2003) 387–391.
- [22] D. R. Woodall, *Distances realized by sets covering the plane*, J. Combinatorial Theory Ser. A, 14:2 (1973), 187–200.